12/11/15

(E_0) $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$

(C) $y^{(n-1)}(x_0) = c_0, \dots, y(x_0) = c_n$ — ύπαρξη μοναδικότητας με την προϋπόθεση των αρχικών τιμών.

και $a_n, \dots, a_1 \in C'(I)$

$a_n(x) \neq 0, \ x \in I$

<u>Θεώρημα 4</u> σελίδα 65-66.

Έχει γίνει αναφορά στο προηγούμενο μάθημα. Τώρα θα δοθεί η απόδειξη.

<u>Απόδειξη</u>

Ας είναι $y_1, \dots, y_n$ λύσεις της (E_0). Υποθέτουμε ότι οι $y_1, \dots, y_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Έστω ότι $\exists x_0 \in I$ $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 0$. Θεωρώ το σύστημα (ομογενές, γραμμικό)

$$(S) \begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0 \\ \dots \\ \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

με αγνώστους τα $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Παρατηρώ ότι η ορίζουσα του (S) είναι $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 0$. Επομένως το (S) έχει μη μηδενική λύση, έστω $c_1, \dots, c_n$ με $|c_1| + \dots + |c_n| \neq 0$. Η συνάρτηση $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$, $x \in I$ είναι λύση της (E_0) με $y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0$ από το σύστημα. Επίσης:

$$y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = 0$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Δηλαδή η y είναι λύση της (E_0) με $y(x_0) = 0$, $y'(x_0), \dots, y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$ $\xrightarrow[\text{Μοναδικότητας}]{\text{Θεώρημα Ύπαρξης}}$ $y(x) = 0$ $x \in I$ ... $c_1 = \dots = c_n = 0$

Άτοπο!

Αντίστροφα

$y_1,\dots,y_n$: λύσεις της E_0. Υποθέτουμε ότι $W(y_1,\dots,y_n)(x)\neq 0$, $\forall x\in I$. Θα αποδείξουμε ότι οι $y_1,\dots,y_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Έστω $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ με:

$c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x)=0$, $x\in I$. Για $x_0\in I$ θα είναι:

$$
\begin{aligned}
&c_1y_1(x_0)+\dots+c_ny_n(x_0)=0\\
&c_1y_1'(x_0)+\dots+c_ny_n'(x_0)=0\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\dots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=0.
\end{aligned}
$$

Παρατηρώ ότι η ορίζουσα του $n\times n$ γραμμικού ομογενούς συστήματος με αγνώστους τα $c_1,\dots,c_n$ είναι η $W(y_1,\dots,y_n)(x_0)\neq 0 \rightsquigarrow$ Το (S) έχει μόνο την μηδενική λύση, δηλαδή $c_1=c_2=\dots=c_n=0 \rightsquigarrow$ $\{y_1,\dots,y_n\}$ γραμμικώς ανεξάρτητες.

Θεώρημα 5 (Liouville)

Ας είναι $x_0\in I$, και y_k $(k=1,\dots,n)$ n-λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0). Τότε, ισχύει:

$$W(y_1,\dots,y_n)(x)=W(y_1,\dots,y_n)(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)}ds},\quad x\in I$$

Απόδειξη

Για $y_1,\dots,y_n$ λύσεις της (E_0) στο I έχουμε:

$$W(y_1,\dots,y_n)(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x)\\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x)\\ \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$

Αν

Οι συναρτήσεις που βρίσκονται σε κάθε θέση παραγωγίζονται, τότε παραγωγίζεται και η ορίζουσα (παραγωγίζω ως προς τις γραμμές)

$$\cancelto{0}{\begin{vmatrix} y_1' & \dots & y_n' \\ y_1' & \dots & y_n' \\ - & - & - \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}} + \cancelto{0}{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1'' & \dots & y_n'' \\ y_1'' & \dots & y_n'' \\ - & - & - \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}} + \dots + \cancelto{0}{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ - & - & - \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ - & - & - \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ - & - & - & - \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ - & - & - & - \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} y_1^{(i)} & \dots & & -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} y_n^{(i)} \end{vmatrix}$$

$$= -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ - & - & - & - \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(i)} & y_2^{(i)} & \dots & y_n^{(i)} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ - & - & - & - \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} W(y_1,\dots,y_n)(x)$$

$$W'(x) = -\frac{a_{n-1}}{a_n}(x)\, W(x) \rightsquigarrow W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)}\, ds}$$

*(Αν η Wronski σε κάποιο x_0 <u>δεν</u> μηδενίζεται τότε δεν μηδενίζεται πουθενά)

• Έστω ότι $\{y_1,\dots,y_n\} \to W_1(x)=W_1(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_{n-1}}{a_n}ds}$

$\{\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_n\} \to W_2(x)=W_2(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_{n-1}}{a_n}ds}$

Ταυτίζεται η σχέση:

$$W_1(x)-W_2(x) = e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_{n-1}}{a_n}}\left[W_1(x_0)-W_2(x_0)\right],$$ το συμπέρασμα

Ορισμός

Ένα σύνολο n-λύσεων $(y_1,\dots,y_n)$ της (E_0) καλείται βασικό αν οι $y_1,\dots,y_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (άρα λύσεις γραμμικής ομογενούς εξίσωσης)

Θεώρημα 6

Υπάρχουν βασικά σύνολα λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης.

Θεώρημα 7

Αν είναι $\{y_1,\dots,y_n\}$ ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0). Για κάθε λύση y της (E_0), υπάρχουν n μονοσήμαντα ορισμένες σταθερές c_k $(k=1,\dots,n)$ ώστε:
$y=c_1y_1+\dots+c_ny_n$.

Απόδειξη

Αν είναι $x_0\in I$ τότε οι $y(x_0),\dots,y^{(n-1)}(x_0)$ μονοσήμαντα ορισμένα. [Το ζητούμενο είναι πως θα προσδιορίσω τα $c_1,\dots,c_n$] Θεωρώ το γραμμικό σύστημα ως προς $c_1,\dots,c_n$.

$$(S)\quad \begin{cases} c_1y_1(x_0)+\dots+c_ny_n(x_0)=y(x_0) = m_0\\ c_1y_1'(x_0)+\dots+c_ny_n'(x_0)=y'(x_0) = m_1\\ \quad\vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\dots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}(x_0) = m_n \end{cases} \to \text{©}$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι η $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$.
$\leadsto \exists$ μοναδικά ορισμένα $c_1, \ldots, c_n$ λύσεις του συστήματος. Θα αποδείξω ότι $\tilde{y}(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$, $\forall x \in I$. Παρατηρώ ότι η συνάρτηση $\tilde{y}$ είναι λύση της (E_0) (ως γραμμικός συνδυασμός λύσεων της (E_0)) και ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $\tilde{y}(x_0) = y(x_0)$, $\tilde{y}'(x_0) = y'(x_0)$ κ.ο.κ. δηλαδή οι y και $\tilde{y}$ είναι λύσεις του Π.Α.Τ $(E)-(C)$. Επομένως, από θεώρημα ύπαρξης-μοναδικότητας
$\leadsto \tilde{y}(x) = y(x) \quad \forall x \in I$